REALIZAR CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O *GEOGEBRA*: O CONTRIBUTO DO AGD PARA A ESTRUTURAÇÃO GEOMÉTRICA

Lina Brunheira

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lbrunheira@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa

Resumo: Este estudo diz respeito a uma experiência de formação com futuros professoras e educadores de uma LEB. Trata-se de uma investigação sobre a prática, no contexto de uma unidade curricular eletiva sobre Geometria Dinâmica. O seu objetivo é analisar o papel do *Geogebra* no desenvolvimento do raciocínio geométrico, particularmente no modo como um grupo de futuros professores estrutura geometricamente as figuras a partir de uma tarefa de natureza exploratória. Os dados apresentados, recolhidos a partir da observação das aulas e das produções escritas dos portefólios, são relativos à realização de uma tarefa centrada na realização de construções geométricas. Os resultados mostram que a realização deste tipo de atividade no *Geogebra* promove a estruturação espacial e geométrica, começando pela perceção de elementos e relações que permitem a construção dinâmica, para posterior descrição através de conceitos formais que são veiculados pelas ferramentas do AGD.

Palavras-chave: geometria, estruturação, visualização, *Geogebra*, formação inicial.

Introdução

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) tornaram-se populares desde o início da década de 90 e o aparecimento do *Geogebra*, de acesso livre e disponível para diferentes plataformas, veio reforçar a sua disseminação. Este *software*, inicialmente concebido para o ensino secundário, tem vindo a ser modificado e explorado de modo a abranger outros ciclos de ensino, do pré-escolar ao ensino superior. Ao mesmo tempo, a investigação tem mostrado o interesse em envolver alunos de diferentes idades em atividades com recurso aos AGD, quer na aprendizagem de conceitos, quer no desenvolvimento do raciocínio (Sinclair & Yerushalmy, 2016). Em particular, Hanna e Sidoli (2007) afirmam que os AGD constituem um meio promissor no desenvolvimento da capacidade dos alunos para conjeturar, refletir e interpretar as relações encontradas e ainda encontrar justificações e provas.

Naturalmente, para que a realização deste tipo de trabalho na sala de aula seja possível, o professor precisa de se apoiar num sólido conhecimento profissional, nas suas diferentes vertentes, em particular o conhecimento matemático. Para isso, é necessário continuar a dar atenção à forma como os programas de formação podem contribuir para melhorar este conhecimento, em particular tirando partido dos AGD, uma sugestão que seguimos neste trabalho (Jones & Tzekaki, 2016). Assim, esta comunicação tem como objetivo principal compreender o papel do *Geogebra* no desenvolvimento do raciocínio geométrico, particularmente na forma como um grupo de futuros professores estrutura geometricamente as figuras, a partir de uma tarefa de natureza exploratória.

A formação inicial de professores e o papel dos AGD

Segundo o NCTM (1994), o conhecimento matemático dos professores deve incluir o domínio de diferentes tipos de raciocínio matemático, formas de resolver problemas e de comunicar Matemática eficazmente, a compreensão de conceitos, de procedimentos específicos e do processo de fazer Matemática. No caso da geometria, o NCTM (1994) afirma ainda que os professores dos anos iniciais devem compreender como ela é usada para descrever o mundo em que vivemos e resolver problemas, saber analisar figuras bi e tridimensionais, produzir argumentações e justificações e privilegiar a visualização espacial.

A forma como os programas de formação procuram desenvolver o conhecimento é também relevante. Em Portugal, o documento produzido por Albuquerque et al. (2005) sugere que a formação dos professores deve desenvolver-se em torno de atividades próprias da Matemática (como a formulação e resolução de problemas) e incluir processos a ela associados (formulação de conjeturas, teste e validação, argumentação, prova e refutação), sem ignorar o recurso à tecnologia ou outras ferramentas e materiais – uma orientação consistente com a ideia de que os futuros professores se devem envolver na aprendizagem ou reaprendizagem da Matemática que ensinarão futuramente, de uma forma consistente com as recomendações da educação matemática (Ponte & Chapman, 2016).

Todavia, no caso particular da geometria, Jones e Tzekaki (2016) referem que os estudos sobre o conhecimento geométrico dos professores e futuros professores indicam que continua a ser necessário dar atenção à forma como estes desenvolvem a compreensão de objetos bi e tridimensionais, havendo resultados relevantes que confirmam o interesse da utilização da tecnologia na resolução de problemas e na demonstração, em particular dos AGD.

Os AGD são uma família de programas assentes na mesma funcionalidade: fornecem um conjunto de ferramentas de construção (e medição) rigorosas que permitem construir elementos livres (por exemplo, segmentos ou pontos arbitrários), podendo ser movidos ou transformados quando arrastados por um cursor, e outros elementos construídos a partir daqueles (designados por dependentes) e que se ajustam automaticamente de forma a preservarem todas as relações de dependência da construção inicial (King & Shattschneider, 2003). Estas caraterísticas tornam possível uma outra funcionalidade salientada por Mariotti (2001) que é a manipulação das figuras através do arrastamento mantendo as suas propriedades. Por um lado, a manipulação da construção faz emergir as suas propriedades que se mantêm invariantes ao arrastamento e, por outro, funciona como um teste que permite validar se a construção está ou não correta (frequentemente apelidado “teste do arrastamento”).

King e Shattschneider (2003) apresentam oito razões para utilizar os AGD: (i) tirar partido do rigor das construções geométricas e das suas medições que conduz a um elevado grau de confiança nos resultados obtidos; (ii) promover a visualização, já que o AGD “ajuda os alunos a *ver* [itálico dos autores] o que significa um facto verdadeiro em geral” (p. 10); (iii) incentivar a exploração, investigação e descoberta conduzindo à formulação de questões (em especial, a questão “e se?”) e conjeturas, bem como o seu teste; (iv) motivar para a demonstração, pois a evidência experimental oferece a convicção necessária para tal empreendimento, além de que o próprio AGD pode fornecer pistas para úteis para a construção dessa demonstração; (v) apoiar a compreensão das transformações geométricas, pois ao testemunharem os efeitos destas transformações, os alunos percebem que não são meras fórmulas simbólicas e apercebem-se melhor das suas propriedades; (vi) apoiar a compreensão dos lugares geométricos, particularmente de algumas curvas clássicas para as quais é usada, na maioria das vezes, uma abordagem analítica; (vii) fornecer oportunidades de simulação de uma enorme variedade de situações; e (viii) possibilitar a criação de micromundos através da utilização de *scripts* que produzem novas ferramentas, permitindo a exploração de geometrias não-euclidianas.

Segundo Battista (2007), uma das ênfases que tem sido dada à utilização dos AGD é a investigação de figuras geométricas a partir da sua manipulação, o que facilita que os alunos deixem de pensar nas figuras de forma holística para pensar nas suas propriedades. Uma outra ênfase que é dada aos AGD diz respeito à realização de construções geométricas. Laborde (2001) compara este tipo de atividade quando realizada com recurso a um AGD (no caso o *Cabri-Géomètre*) versus com recurso a papel e lápis. Na sua opinião, quando fazemos construções com papel e lápis, a atividade é muitas vezes controlada pela perceção em vez de ser orientada pelas propriedades da figura. Ao contrário, num AGD não é possível construir um quadrado "a olho" e é necessário mobilizar um conjunto de propriedades que possam definir a figura, as quais são veiculadas através das ferramentas usadas na construção. Mas se os alunos souberem aplicar as propriedades corretamente, podemos então perguntar-nos, como Battista (2007), o que aprenderam com a atividade? Segundo este autor,

> talvez nenhum conhecimento novo foi adquirido, mas ao invés, o conhecimento e o raciocínio dos alunos foi aprofundado e enriquecido. O processo de aplicar conceitos conhecidos a novas situações requere a sua interiorização, tornando-os mais poderosos. Ou talvez novas conexões entre propriedades tenham sido construídas ou estendidas (p. 878).

Uma outra resposta possível para a questão anterior implica recorrer ao conceito de "olho geométrico", da autoria do matemático do início do século XX Charles Godfrey, e recuperada por Fujita e Jones (2002). "Olho geométrico" significa "o poder de ver as propriedades geométricas destacadas da figura" (Fujita & Jones, 2002, p. 385). Na opinião daqueles investigadores, o conceito de Godfrey pode ser uma ferramenta potente para promover a intuição geométrica e deveria ser treinada em todos os estádios da aprendizagem da geometria. Na verdade, existe uma clara ligação entre a atividade de realizar construções num AGD e o desenvolvimento do "olho geométrico", na medida em que aquela atividade implica, como referimos, identificar as propriedades que permitem definir a construção. Desta forma, uma outra possível consequência da atividade de realizar construções no AGD é o desenvolvimento da intuição.

Finalmente, um outro conceito que pode trazer alguma luz a esta questão, diz respeito à estruturação espacial e geométrica, proposto por Battista (2008). Este investigador formulou uma categorização para analisar o raciocínio geométrico que parte da teoria de van Hiele e estabelece três níveis, correspondentes a graus de sofisticação diferentes: a estruturação espacial, a estruturação geométrica e a estruturação lógica/axiomática. A estruturação espacial é um tipo especial de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos, através da identificação das suas componentes, da forma como se combinam e relacionam. A estruturação geométrica descreve a estruturação espacial através de conceitos formais, tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformações geométricas ou sistemas de coordenadas. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, isto é, para que seja possível estruturar geometricamente um objeto, é necessário que o indivíduo tenha interiorizado a estruturação espacial correspondente. A estruturação lógica/axiomática organiza formalmente os conceitos geométricos num sistema para que as suas relações possam ser estabelecidas através de dedução lógica. Para operar a este nível, é necessário que a estruturação espacial atinja um nível "simbólico", ou seja, que as afirmações verbais ou simbólicas possam substituir os próprios modelos mentais.

De certa forma, a noção de "olho geométrico" e de estruturação estão ligadas, na medida que em ambos os casos é necessário destacar as propriedades das figuras. Contudo, a distinção de Battista (2008) entre estruturação espacial e geométrica permite-nos avançar mais aprofundadamente na análise desta capacidade, pelo que será um conceito-chave para a análise dos dados que este trabalho apresenta.

Metodologia de investigação

No ano letivo de 2015/16, a primeira autora deste artigo lecionou a unidade curricular eletiva Geometria Dinâmica (GD) que funcionou pela primeira vez na LEB da sua instituição. Este desafio implicou a conceção da unidade, em conjunto com a sua coordenadora[1], no que diz respeito aos temas, tarefas, avaliação e modos de trabalho. A unidade foi dividida em dois momentos: (i) 10 aulas, dedicadas à resolução de tarefas de geometria organizadas em quatro temas – Resolver Problemas, Construir, Investigar e Criar; e (ii) 5 aulas, dedicadas à dimensão didática, projetando o trabalho do AGD com crianças do pré-escolar, 1.º e 2.º ciclos. Nas aulas, cada formando trabalhou com um computador, podendo discutir as suas resoluções com os seus colegas. No que respeita à avaliação, cada formando construiu um portefólio e, a pares, um *GeogebraBook*.

O presente estudo corresponde a uma investigação sobre a prática, de natureza qualitativa. Esta opção decorre, por um lado, da natureza do seu objetivo – compreender um problema que afeta a prática – e, por outro, das potencialidades desta metodologia, entre as quais, contribuir para o desenvolvimento profissional e organizacional, "bem como gerar importante conhecimento sobre os processos educativos, útil para outros professores, para os educadores académicos e para a comunidade em geral" (Ponte, 2002, p. 13). As fontes principais de dados foram os portefólios e os *GeogebraBooks* dos seis formandos que frequentaram a unidade, sobre a qual foi feita uma análise documental. A professora-investigadora recolheu ainda dados a partir da observação, os quais registou através de notas de campo.

À exceção de Pedro que frequentava o 3.º ano da LEB, as restantes formandas frequentavam o 2.º ano e, simultaneamente, a unidade curricular de Geometria. Nenhum deles tinha experiência de trabalho com o *Geogebra* ou outro AGD, à exceção de Pedro que tinha usado o programa no ano anterior. Atendendo a que a unidade de GD é eletiva, a escolha por parte dos futuros professores pode ser considerada um indicador de que gostam de geometria e que não sentem grandes dificuldades nesta área, o que se veio a confirmar neste grupo.

A análise de dados foi realizada com base num quadro de análise construído pela primeira autora do artigo (Brunheira, 2016), a partir dos conceitos de estruturação espacial e geométrica (Battista, 2008) anteriormente apresentados. O quadro não inclui o nível de

[1] Cristina Loureiro

estruturação lógica, uma vez que este se refere a um raciocínio que opera a um nível simbólico que, neste caso, não consideramos relevante. Muito embora o quadro seja utilizado para analisar as resoluções (identificando a natureza das relações e o tipo de conceitos envolvidos), os descritores estão formulados com vista a caracterizar o nível de estruturação dos sujeitos. Todavia, salvaguardamos que a associação de um nível a uma resolução não significa que possamos caracterizar o nível de estruturação de um indivíduo unicamente com base numa tarefa/resolução, devendo apenas constituir-se como um indicador.

Quadro x – Descritores dos níveis de estruturação espacial e geométrica

<table>
<tr><td rowspan="2">Níveis</td><td colspan="2">Estruturação geométrica</td></tr>
<tr><td>Estruturação espacial</td><td>Domínio de conceitos</td></tr>
<tr><td>N0</td><td>Não estabelece relações geométricas entre as figuras e os seus elementos, ou não estabelece na maioria das vezes.</td><td>Não domina os conceitos mais elementares e a sua linguagem é muito limitada no vocabulário de geometria.</td></tr>
<tr><td>N1</td><td>Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis das figuras, mas esta perceção pode depender da posição das figuras e dos seus elementos ou do contexto em que estão imersos.</td><td>Utiliza os conceitos de lado e ângulo, congruência, perpendicularidade e paralelismo no plano.

No espaço, usa o conceito de vértice, aresta e face.</td></tr>
<tr><td>N2</td><td>Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis das figuras em qualquer posição ou contexto.

Perceciona relações geométricas associadas a elementos invisíveis das figuras, mas esta perceção pode depender da posição das figuras e dos seus elementos.</td><td rowspan="2">No plano, utiliza os conceitos de eixo de simetria, diagonal, mediatriz, ponto médio e as transformações geométricas.

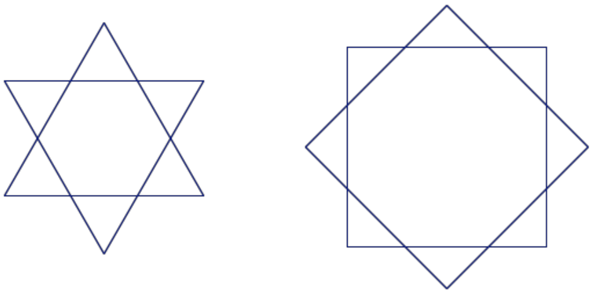
No espaço, utiliza o conceito de congruência, paralelismo e perpendicularidade.</td></tr>
<tr><td>N3</td><td>Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis e invisíveis das figuras, independentemente da sua posição ou contexto.

Generaliza as relações geométricas para uma família de figuras.</td></tr>
</table>

Tarefa e resoluções dos formandos

Os dados que apresentamos dizem respeito a uma tarefa (Figura 1) que foi resolvida no âmbito do tema *Construir*. Neste tema, pretendia-se que os formandos reproduzissem no *Geogebra* figuras, ou famílias de figuras, a partir das propriedades identificadas visualmente, de modo a que as construções fossem dinâmicas. Este trabalho corresponde assim a uma das ênfases dadas à utilização dos AGD, anteriormente referida.

1. Construa cada uma das estrelas. Descreva sumariamente o processo de construção que usou.



2. Para cada uma das estrelas obtenha um outro processo distinto de construção. Descreva sumariamente o processo usado.
3. Construa outras estrelas desta família com maior número de vértices, usando processos de construção análogos. Generalize um dos processos de construção que usou.
4. Estabeleça relações entre o número de pontas da estrela e outros elementos da construção.

Figura 1 – Tarefa *Construir estrelas* (adaptada de Johnston-Wilder e Mason, 2005).

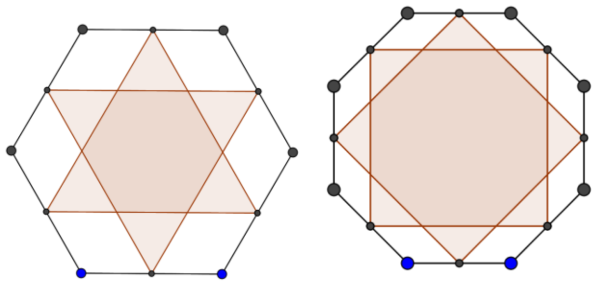
De seguida, apresentamos excertos[2] das resoluções de Inês, Carla e Pedro retiradas dos seus portefólios, bem como a sua análise.

Resolução de Inês

Nesta resolução apresentamos os dois processos utilizados por Inês, sendo que o processo A é descrito estritamente para as estrelas de 6 e 8 pontas e o B tem uma descrição generalizada à construção de qualquer estrela desta família.

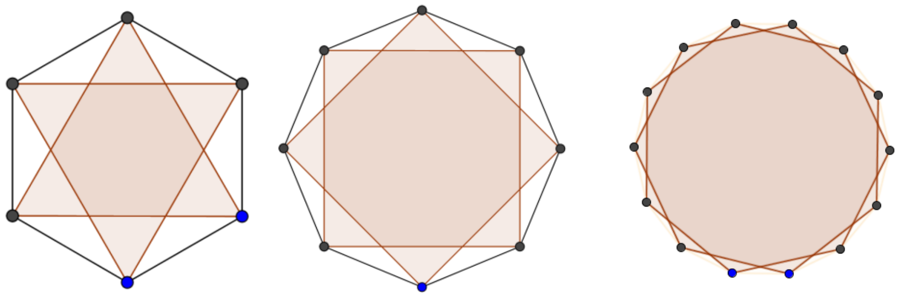
[2] Apesar de o portefólio ter sido construído parcialmente fora da sala de aula, a tarefa foi resolvida em aula e as resoluções são consistentes com o trabalho feito nesse momento. Algumas figuras foram reproduzidas no *Geogebra* de modo a tornar a sua leitura mais legível.

Processo A



Estrela de 6 pontas: Construir um hexágono regular, encontrar os pontos médios de cada lado e unir os pontos médios não consecutivos. Estrela de 8 pontas: O mesmo processo começando com um octógono.

Processo B



Construir um polígono com um determinado número de lados e construir dois polígonos nele a partir da união de vértices não consecutivos.

O número de pontas das estrelas corresponde ao número de vértices do polígono utilizado para a sua construção. Não é possível utilizar [este processo] com base em polígonos regulares de número de lados ímpar, uma vez que não existem dois conjuntos de pontos não consecutivos que possam ser unidos.

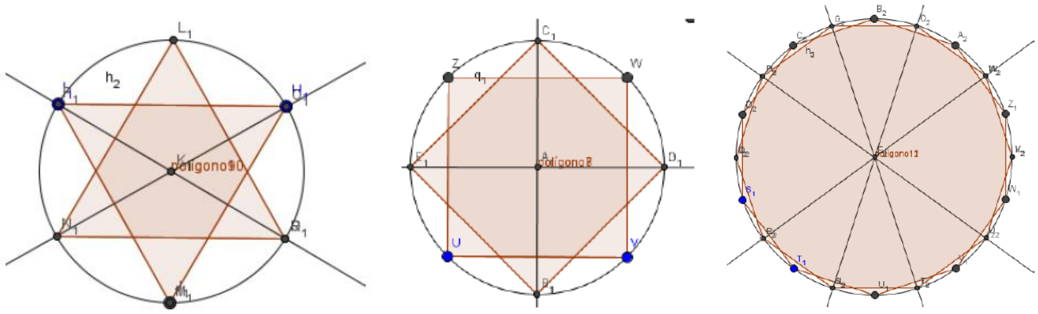
Figura 2 – Resolução de Inês da tarefa *Construir estrelas.*

Ambas as construções assentam na visualização da estrela como uma figura só (ou seja, como um todo) e um hexágono regular (no caso da estrela de 6 pontas) onde a estrela se inscreve de duas formas – no processo A, os vértices da estrela coincidem com os pontos médios dos lados do hexágono e, no processo B, com os vértices do hexágono. Assim, em qualquer dos casos, são mobilizados elementos invisíveis e que foram criados para auxiliar a construção da estrela. Curiosamente, o processo A com que Inês inicia a construção é menos direto do que o processo B, já que implica a determinação dos pontos médios dos lados do polígono regular. Uma possível explicação para esta sequência é o facto de o hexágono que é visualizado no processo A estar na posição em que essa figura é habitualmente apresentada, o que pode ter levado a formanda a visualizá-lo mais rapidamente do que o hexágono no processo B.

No que diz respeito à generalização, Inês consegue apresentar um processo que pode ser aplicado a qualquer estrela e estabelece uma relação entre o polígono de que parte e o número de vértices da estrela. Finalmente, a formanda identifica que o polígono regular inicial não pode ter um número de lados ímpar e apresenta uma justificação para esta conclusão. Desta forma, Inês apresenta uma resposta que revela uma estruturação geométrica muito boa desta família de figuras, correspondente ao nível 3 do quadro de análise dos níveis de estruturação.

Resolução de Carla

Carla construiu as estrelas recorrendo a um processo idêntico ao processo B de Inês e outro processo, apresentado na figura 3, que descreve generalizado para qualquer estrela.



1. Construir uma figura inicial de acordo com o número de pontas da estrela pretendido (este polígono deverá ser um polígono regular em que o seu número de vértices é metade do número de pontas da estrela). 2. Traçar as mediatrizes de cada um dos lados do polígono previamente construído para assim ser descoberto o seu centro. 3. Traçar uma circunferência com centro no ponto de interseção das mediatrizes e com raio até um dos vértices da figura. 4. Os pontos de interseção entre as mediatrizes e a circunferência serão os vértices da segunda figura que compõe a estrela.

O número de pontas da estrela é o dobro do número de lados da figura que se usa inicialmente para a construção.

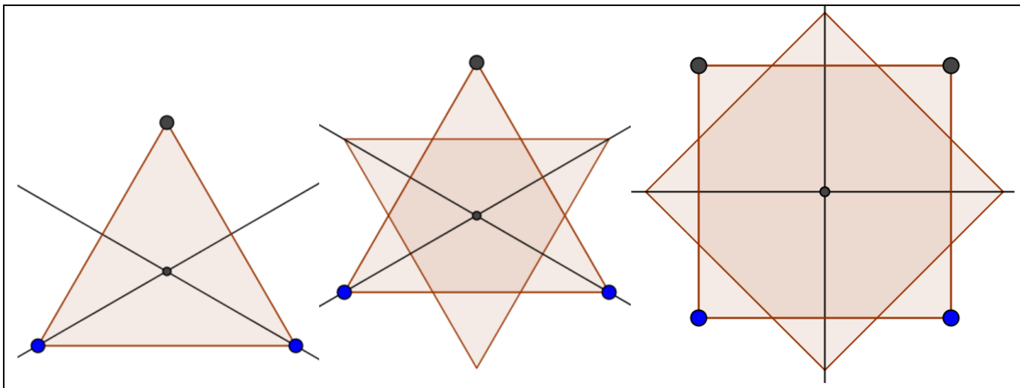
Figura 3 – Resolução de Carla da tarefa *Construir estrelas.*

Ao contrário do primeiro processo que utilizou, nesta construção Carla olha para a estrela decompondo-a em dois polígonos regulares congruentes, sendo que um deles constitui o ponto de partida para a construção. A determinação do segundo polígono implica a visualização da estrela inscrita na circunferência e, além disso, a visualização dos vértices do segundo polígono contidos nas mediatrizes (um conceito que não dominava), o que significa identifica que os vértices consecutivos da estrela são equidistantes entre si e ainda equidistantes do centro da estrela. No que respeita às relações entre elementos da construção e o número de pontas da estrela, identifica que este é o dobro do número de vértices do polígono inicial, mas não justifica porquê.

Desta forma, Carla apresenta também uma estruturação geométrica muito boa desta família de figuras, identificando várias relações entre os seus elementos, recorrendo a elementos visíveis e invisíveis, com recurso a conceitos que evidenciam essas relações, como sejam a circunferência e a mediatriz, o que corresponde igualmente ao nível 3.

Resolução de Pedro

O segundo processo a que Pedro recorre e que apresentamos na figura 4, tem uma primeira formulação para a estrela de 6 pontas e uma segunda generalizada a qualquer número de pontas.



Construção de um polígono regular de 3 lados. Marcam-se as mediatrizes dos lados para encontrar o ponto de interseção. O passo seguinte consiste na rotação da figura em torno do ponto de interseção e amplitude 60º = (360/(3×2))

Começar com qualquer polígono regular de x lados e rodá-lo em torno do ponto central com uma amplitude de 360º/(nº lados do polígono×2)

Número de pontas = nº de lados do polígono inicial × 2

Número de pontas = 360/amplitude de rotação

Figura 4 – Resolução de Pedro da tarefa *Construir estrelas.*

Neste processo, Pedro olha para a figura da mesma forma que Carla, ou seja, decompondo a estrela em duas figuras congruentes. A sua resolução acaba por ser equivalente à da sua colega porque recorre às mesmas relações – a equidistância entre os vértices consecutivos da estrela e entre estes e o centro da estrela. Contudo, Carla parece olhar para a estrela de um ponto de vista estático, enquanto Pedro visualiza o "movimento" de rotação do primeiro polígono de forma a obter o segundo e assim construir a estrela.

No que respeita às relações entre elementos da construção e o número de pontas da estrela, Pedro estabelece duas relações válidas – com a amplitude de rotação e com o número de lados do polígono inicial. Além disso, generalizou o processo de construção mobilizando uma terceira relação entre a amplitude do ângulo de rotação e o número de lados do polígono inicial. Desta forma, tal como as suas colegas, Pedro apresenta uma estruturação geométrica muito boa, correspondendo igualmente ao nível 3.

Resolução de Luísa

Finalmente, refiro ainda a resposta de Luísa que generalizou o mesmo processo de construção utilizado por Pedro. No que respeita a esta formanda, esta resolução deve ser destacada pelo facto de, no momento em que resolveu a tarefa, ainda não tinha sido lecionado o tópico referente às isometrias na unidade de Geometria. A formanda tinha apenas uma ideia, que explicitou à professora, de que rodando o triângulo inicial de uma certa forma, seria possível obter o segundo triângulo e formar a estrela. Pediu ajuda para saber se o *Geogebra* poderia executar esse "movimento", pelo que lhe foi explicado como funcionava a ferramenta "Rotação". Apesar da sua ideia, Luísa não sabia que a caracterização dessa transformação está dependente de um ponto (o centro), mas achou natural a indicação de um ângulo de rotação.

Luísa produz uma generalização diferente no que respeita à relação entre o número de lados do polígono inicial e a amplitude do ângulo de rotação:

"Para polígonos regulares com número de lados par, amplitude = 180º/nº de lados

Para polígonos regulares com número de lados ímpar, amplitude = 180º"

Apesar de esta generalização ser subdividida em dois casos, podendo assim ser considerada "menos poderosa", tem a vantagem de utilizar um valor constante para o caso do número de lados do polígono inicial ser ímpar. Esta generalização pode significar que Luísa identifica que, nestes casos, basta que o polígono original sofra uma rotação de meia-volta sobre si mesmo para obter a estrela pretendida.

Discussão

As resoluções que apresentámos são todas válidas e todos os participantes foram bem-sucedidos na resolução da tarefa, tendo elaborado as construções através de processos diferentes e mostrando ainda grande envolvimento na atividade. O facto de esta tarefa ter sido escolhida para constar no portefólio individual por cinco dos seis elementos que constituía o grupo de formandos, constitui também um indicador de que o trabalho realizado foi considerado bastante significativo. Na verdade, este aspeto foi referido por todos e as reflexões constantes nos portefólios suportam algumas das conclusões desta investigação que passaremos a apresentar.

A principal conclusão que pretendemos destacar é que o *Geogebra* potencia significativamente a estruturação geométrica, o que deriva de diferentes características e potencialidades que reconhecemos no AGD. Começamos com duas características – a facilidade de utilização e o rigor das construções – as quais associamos a duas potencialidades – a promoção da intuição e da exploração. De facto, como aconteceu com Luísa, por vezes os formandos começavam a construção partindo da intuição de que a utilização de algumas propriedades ou elementos da figura (ou figuras auxiliares) poderiam ser úteis, mas sem certeza. A possibilidade de testar facilmente essas conjeturas através de uma construção rápida e rigorosa, ou voltar atrás caso não se verificassem, foi um aspeto determinante, como podemos reconhecer nas palavras de Inês:

> Com a aplicação do *Geogebra*, foi possível explorar diferentes formas de construção de estrelas utilizando polígonos, retas, pontos médios, retas paralelas, entre outros, de forma fácil, simples e com rigor. A não utilização desta aplicação traduzir-se-ia num processo longo e relativamente difícil, especialmente no momento de construção dos polígonos regulares utilizados como base para a construção das estrelas. (Portefólio)

Outra potencialidade do *Geogebra* que emergiu em alguns momentos é a promoção da justificação. De facto, a possibilidade de testar a validade das construções quase num processo de tentativa e erro, não significa que os formandos não tenham refletido sobre os passos a dar para chegar à estrela pretendida, como observamos no comentário de Luísa:

> Após a descoberta da ferramenta que realizava a rotação da figura selecionada, segundo um ângulo escolhido por mim, tive de refletir sobre qual o valor que deveria aplicar a cada polígono regular consoante o número de lados de cada um . . . tive de parar e pensar sobre o porquê de o ângulo de rotação diferir conforme o número de lados, assim como, encontrar uma resposta matemática que me apresentasse o valor correto referente a cada figura geométrica. (Portefólio)

No caso de Luísa, vemos que sentiu a necessidade de refletir sobre o valor da amplitude a introduzir mas, mais do que isso, essa ação conduziu-a a pensar na justificação do valor escolhido, relacionando-o com o número de lados do polígono original. Desta forma, vemos que apesar de o AGD ter um papel importante na convicção do utilizador de que uma relação é válida, podendo conduzir à subvalorização da justificação ou prova, ele pode ter o efeito contrário, ou seja, promover a procura da justificação para as relações encontradas. Esta ideia estende-se ainda às construções impossíveis, tal como vemos Inês a justificar por que razão não é possível partir de um polígono com um número ímpar de lados.

Uma outra característica do *Geogebra* é nos "obriga" a trabalhar com os conceitos formais associados às suas ferramentas. Desta forma, podemos pensar que só é possível tirar partido do AGD quando se opera ao nível da estruturação geométrica e, de facto, como refere Battista (2007), não é possível fazer as construções geométricas sem ter atingido algum nível de "explicitação conceptual e representacional". No entanto, os dados desta investigação mostram que o *Geogebra* pode favorecer a transição da estruturação espacial para a geométrica. Um exemplo é dado pelo caso de Luísa em que, mesmo sem conhecer formalmente o conceito de rotação, mobilizou-o corretamente, tendo sido o AGD a promover a sua apropriação.

Finalmente, em ligação à natureza aberta da tarefa que promove diferentes resoluções, o *Geogebra* apoia esta diversidade através do conjunto de ferramentas que disponibiliza, o que é também um estímulo à criatividade, tal como refere Pedro:

> A escolha desta tarefa incidiu no facto desta nos dar liberdade, com a ajuda visual do *Geogebra*, para construirmos as figuras a partir de processos distintos. Estes processos dependem da nossa capacidade de imaginar sobreposição de figuras geométricas, linhas orientadoras na construção (retas, semirretas, etc.) e outros pontos indispensáveis da figura final (estrela) . . . melhora a capacidade de encontrar relações entre figuras e os seus elementos de construção (dependendo do processo) e estimula a criatividade no processo em si. (Portefólio)

A concluir

Em síntese, esta investigação teve por base uma tarefa que se enquadra num dos tipos de trabalho referidos por Battista (2007), em que reconhecemos as vantagens referidas por Laborde (2001). Igualmente, corroboramos as afirmações de King e Shattschneider (2003) no que respeita às razões que apoiam a utilização dos AGD, particularmente no que respeita a tirar partido do rigor e promover a visualização, exploração, investigação, descoberta e demonstração, ao que acrescentamos a criatividade e a intuição. Contudo, os dados evidenciam ainda que a realização de construções no *Geogebra* contribui para a estruturação espacial e geométrica. De facto, tal como dizem Fujita e Jones (2002), é necessário treinar o "olho geométrico", ou seja, a capacidade de destacar as propriedades das figuras, algo que foi central na atividade realizada e claramente favorecido pelo AGD. No entanto, voltemos à pergunta de Battista (2007): se os sujeitos souberam aplicar as propriedades corretamente, o que aprenderam com a atividade? A forma como responde à questão mantém-se, na nossa opinião, pertinente. No entanto, em duas resoluções que apresentámos, os formandos recorreram a conceitos que não dominavam – a mediatriz e a rotação – e aplicaram-nos corretamente. Nesse sentido, e no que respeita a estes conceitos, passaram de um nível em que apenas percecionavam esses elementos e relações geométricas para a sua descrição através de conceitos formais.

O contributo principal deste estudo diz respeito à importância deste tipo de trabalho na formação inicial de professores, com ênfase na utilização do AGD. Do ponto de vista da aprendizagem matemática, consideramos que as resoluções apresentadas evidenciam a relevância de tarefas de natureza exploratória que envolvam construções geométricas, promovendo a evolução na forma como estruturam as figuras geometricamente através da identificação de relações e propriedades. Além desta perspetiva, os comentários dos formandos revelam ainda a pertinência da atividade matemática associada à reflexão sobre a própria atividade. Esta reflexão – neste caso potenciada pela produção do portefólio – permite que os formandos tomem consciência da sua própria aprendizagem com relação ao trabalho desenvolvido, o que pode ser um contributo importante para o seu conhecimento didático.

Referências

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CT: Information Age.

Battista, M. T. (2008a). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heide (Eds.) *Research on technology and the teaching and learning of mathematics, Vol. 2: Cases and Perspectives* (pp. 131-156). Greenwich, CT: Information Age.

Brunheira, L. (2016). *O raciocínio geométrico no processo de definir: Uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras*. Manuscrito não publicado.

Fujita, T., & Jones, K. (2002), The bridge between practical and deductive geometry: Developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, 384-391). Norwich, UK.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM, 39*(1-2), 73-78.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing thinking in geometry*. London: Sage.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109-149). Rotherham: Sense.

King, J. R., & Schattschneider, D. (2003). Tornar a geometria dinâmica. In E. Veloso & N. Candeias (Eds.), *Geometria dinâmica: Seleção de textos do livro Geometry Turned on!* (pp. 7-13). Lisboa: APM.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283-317.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 257-281.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 223-261) New York, NY: Routledge.

Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. In A. Gutiérrez, G.C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 235-274). Rotherham: Sense.